Verslagen van de
Studiegroep Wiskunde met de Industrie
2019

Wageningen
28 januari – 1 februari, 2019

Anouck Vrouwe

De Studiegroep Wiskunde met de Industrie is financieel gesteund door:

- *De Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO)*
- *Biometris, Wageningen University and Research*
- 4TU.AMI

Voorwoord

In dit rapport treft u verslagen aan van de “Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI 2019)”, die plaats vond in Wageningen in de week 28 januari – 1 februari, 2019.
Deze populaire verslagen zijn geschreven door wetenschapsjournaliste Anouck Vrouwe en bedoeld voor een breed publiek. De wetenschappelijke verslagen, waarin de gebruikte wiskundige modellen, methoden en resultaten uitvoerig staan beschreven, zijn gebundeld in een parallel, engelstalig rapport.

Tijdens de SWI hebben er groepjes wiskundigen samen met de industriële partners gewerkt aan problemen die vanuit de industrie ingebracht waren. De problemen waren open geformuleerd, wat inhoudt dat er gestart moest worden met een vertaalslag, waarin het probleem geformuleerd werd in wiskundige termen. Tijdens zo’n SWI ligt er altijd veel nadruk op dit aspect van ‘wiskundig modelleren’. Per probleem is er een team met specialisten uit diverse hoeken van de wiskunde aan de slag gegaan. Juist dit samenwerken bleek een grote meerwaarde op te leveren. Het enthousiasme was daarbij zo groot dat er lang en intens gewerkt werd om in de korte tijd van enkele dagen tastbare resultaten te boeken. Op maandag werden de problemen aan de deelnemers gepresenteerd door de industriële partners en op vrijdag presenteerden de wiskundigen de resultaten en voorspellingen van de modellen aan de industriële partners. Het was verbazend hoe ver men dankzij teamwerk gekomen was.

De traditie van het organiseren van zulke Studiegroepen stamt uit Engeland, waar in 1968 in Oxford de eerste Studiegroep plaats vond. Het concept werd zo’n succes, dat er tegenwoordig studiegroepen op vele plaatsen in de wereld bestaan. De eerste nederlandse studiegroep werd gehouden in 1998. Voor verdere informatie: zie de website http://miis.maths.ox.ac.uk. De

europese studiegroepen worden strikt doorgenummerd en SWI 2019 was ook de 148ste "European Study Group with Industry (ESGI 148)".

De problemen tijdens SWI 2019 werden aangedragen door Bruil, Hendrix Genetics, Synopsis, KWR Water, Sweco en Marin, en betroffen respectievelijk het 3-D printen met beton, het wegen van kalkoenen, het optimaliseren van chip design, het filteren van water, het regelen van verkeerslichten en het berekenen van golfgedrag rond schepen. Kortom, een bonte mix van onderwerpen, maar bij allemaal blijkt wiskunde een essentiële bijdrage te kunnen leveren aan de oplossing.

Als organiserend team danken we iedereen die heeft bijgedragen aan het succes van SWI 2019: de deelnemers, de industriële partners, maar uiteraard ook de sponsors. Ook nu weer heeft NWO een genereuze financiële bijdrage geleverd. Daarnaast waren er bijdragen van 4TU.AMI en Wageningen UR.

Moge de SWI traditie nog lang voortbestaan!

Het organisatieteam van SWI 2019:

Guus ten Broeke, Jos Hageman, Lia Hemerik, Karel Keesman, Jaap Molenaar, Hans Stigter, Dinie Verbeek, George van Voorn, Gerard van Willigenburg.

Inhoudsopgave

Voorwoord 1

Bruil: Vrije vorm: stabiele 3D-prints van beton 7

Hendrix Genetics: Kalkoenen wegen: gewichtige loopjes 13

Synopsys: Reistijden op een chip 17

KWR Water: Dichtslibbende filters en vastlopende computers 23

Sweco: Nog even wachten voor meer rust 29

Marin: De snelle schroef en het trage schip 35

Vrije vorm: stabiele 3D-prints van beton

Het printen van beton biedt architecten nieuwe mogelijkheden. Maar beton is geen gemakkelijk materiaal om mee te werken. Blijft een ontwerp tijdens het printen stabiel? Dat wil leverancier van (prefab)beton en mortels Bruil weten van de deelnemers aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie.

Een treurig hoopje beton ligt op de grond, een geslaagd voorbeeld van een mislukt experiment. Als een plumpudding is het beton onder zijn eigen gewicht in elkaar gezakt. “Dit is wat er gebeurt als ons ontwerp niet goed is. Onze vraag aan jullie: hoe voorkomen we dit?”, vraagt innovatie-ingenieur Elise Buiter de wiskundigen die meedoen aan de studiegroep.
Het is nieuw, en het biedt fantastisch nieuwe mogelijkheden. Buiter werkt bij betonbedrijf Bruil aan 3D-printen met beton, een jonge technologie. Een robotarm met spuitmond plaatst banen van beton in een vooraf bepaald patroon. Laagje op laagje, tot het element af is. De methode maakt het mogelijk ronde vormen te maken, zoals een gekromd balkon dat Buiter in haar presentatie laat zien. “Architecten vinden het geweldig, het geeft ze betaalbare vormvrijheid.”

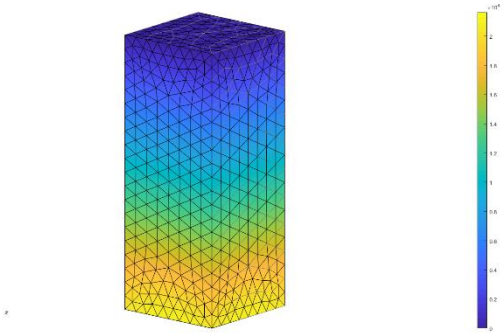
Geprint beton biedt nieuwe mogelijkheden, zoals dit gekromd balkon. Foto: Bruil.

Niet alle vormen zijn printbaar. Als er teveel overhang is, kan het beton plaatselijk inzakken. Ook kan de hele constructie onder haar eigen gewicht bezwijken. Halverwege uitbulken, plastische vervorming in jargon, gebeurt ook van tijd tot tijd. Bij Bruil zijn ze inmiddels ervaringsdeskundig: ze hebben gevoel gekregen voor wat wel en niet kan. Het bedrijf heeft op basis van ervaring een maximum gesteld aan de overhang in een ontwerp. Daarnaast weten ze goed bij welke printsnelheid het resultaat het beste is. Maar liever nog zou Bruil een meer gedegen en onderbouwde check kunnen doen om vooraf te bepalen of een ontwerp stabiel blijft tijdens het printen. “Verspilling kost geld en is belastend voor het milieu, dus als we printen, willen we het goed doen. Ons doel is het aantal foute prints tot nagenoeg nul te reduceren”, aldus Buiter.

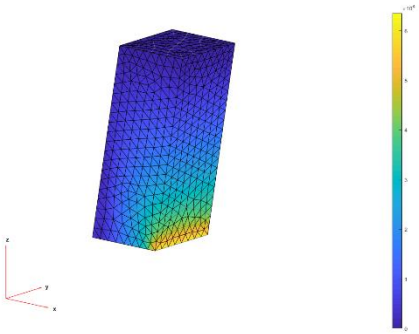
De wiskundigen besloten om eerst een aantal aanvullende eisen op te stellen voor een ontwerp, die de kans op succes vergroten. De eerste twee bleken inkoppertjes: de uitstroomsnelheid van het beton moet hoog genoeg zijn, anders hardt het al uit in de spuitmond. Ook de maximale capaciteit van de printer is een harde grens. Twee andere eisen hingen samen met de ‘hoogtegroei’ van het beton, de juiste snelheid om de laagjes op te bouwen. De eerste eis was dat er snel genoeg een nieuwe laag op de vorige komt. Gebeurt dat niet, dan vormt het beton geen homogene massa meer en verzwakt. Maar de lagen te snel aanbrengen, is ook niet goed. Dan is er te weinig tijd om uit te harden, en dat levert instortingsgevaar. Uit de literatuur haalden de wiskundigen een maximum voor de hoogtegroei: niet meer dan 1,5 meter per uur. Zo kwamen er een maximale padlengte per omgang en een maximum hoogtegroei per minuut bij op de eisenlijst voor een goed ontwerp.

Daarnaast keken de wiskundigen naar het massazwaartepunt van de constructie. “Een ontwerp valt om wanneer het massazwaartepunt buiten het vloervlak valt”, legt Lense Swaenen uit. Hij is wiskundige bij Sioux LIME en deed mee aan de Studiegroep. “Wanneer je zorgt dat het massazwaartepunt tijdens het printen niet buiten het vloeroppervlak komt, dan weet je dat

de constructie niet omtuimelt. Je kunt een extra veiligheidsmarge inbouwen door het vloeroppervlak nog met tien procent in te krimpen."
Buiter: "Met dit eisenlijstje zijn we heel blij, omdat het direct toepasbaar is. We ontwikkelen nu software om het printen van ontwerpen te automatiseren. Deze eisen gaan we in die software implementeren."
Een eisenlijstje kan het aantal fouten verkleinen, maar het garandeert nog niet dat een ontwerp daadwerkelijk stabiel is. Dus wilden de wiskundigen ook graag een methode ontwikkelen die Bruil die zekerheid wel geeft. De manier om dat te doen is de krachtenbalans tijdens de print volledig door te rekenen. Een structurele analyse dus, zoals dat bij de bouw van bruggen of gebouwen ook wordt gedaan. "Die zou je dan voor iedere laag moeten doen", legt Swaenen uit.
Doordat beton uithardt tijdens en na het printen, veranderen de eigenschappen door de tijd. Swaenen: "In de tijd vanaf het begin van de print tot het eind kan het beton wel tien keer sterker worden. Daar moet je bij het modelleren rekening mee houden."
Nat beton gedraagt zich als een zogeheten binghamvloeistof, vertelt Swaenen. Dat betekent dat het in dezelfde categorie valt als mayonaise, pindakaas, behanglijm en klei: het is stevig en vloeit pas vanaf een bepaalde druk. "In onze simulaties beschouwden wij het als een elastisch materiaal, tot het punt dat het breekt", vertelt Swaenen. De wiskundigen gebruikten de eindige-elementenmethode (FEM) voor een statische, structurele analyse. "Dat betekent dat je de structuur opdeelt in elementen, waarbij op ieder element de zwaartekracht werkt en de krachten vanuit de buurelementen", legt Swaenen uit. Die krachten mogen dan niet zo uitvallen, dat het element 'breekt' en het beton begint te vloeien. "Voor iedere nieuwe laag doen we dan een nieuwe berekening; iedere toevoegde laag verandert immers het krachtenspel." Voor een aantal snelle analyses gebruikten de wiskundigen standaard FEM-software van MATLAB.



Resultaten van de FEM-analyses voor verschillende structuren.



Resultaat van de FEM-analyse van een schuine pilaar.

Bruil wil graag een methode die snel is, zeker niet langer dan een paar minuten. Buiter: “Architecten willen maximale vrijheid. Ze zullen steeds met andere ontwerpen komen die de grenzen opzoeken. Daarom zullen we wel toe moeten naar een methode om nieuwe ontwerpen snel helemaal door te rekenen.” De wiskundigen keken naar de rekentijd van een aantal eenvoudige structuren, zoals een rechte en een schuine pilaar. Die simulaties duurden een halve minuut. De rekentijd zal bij ingewikkeldere constructies verder oplopen. “De vraag die we ons nu stelden, was hoe we de rekentijd konden beperken”, zegt Swaenen. Eén

mogelijkheid om de simulatie klein te houden is door bij de berekeningen een grid te kiezen dat nauw aansluit bij de gewenste geometrie. “Voor printen kun je beter een rechthoekig grid dan een driehoekig kiezen”, licht Swaenen toe. Een slimme besparing van de rekentijd is daarnaast om niet het hele grid door te rekenen, maar alleen het deel waar daadwerkelijk beton zit. “Anders is de computer aan het rekenen met een groot stuk waar nog niets is – waar dus alleen maar nullen staan. Die nullen vergroten de rekentijd, je kan hiermee de rekentijd met een factor 10 tot 100 verkorten.”

Een deel van de groep keek ook of ze met vergelijkingen de fysica van de constructie konden benaderen. Met eenvoudige fysica is een aantal standaardvormen goed door te rekenen. Swaenen: “We valideerden met eenvoudige fysische modellen eerst een aantal basisvormen, zoals een rechte muur, een schuine muur en een divergerende cilinder. Het idee is dat je dat uit zou kunnen bouwen naar willekeurige vormen.” De fysische modellen gaven ook extra inzicht in de criteria, die je voor een stabiel systeem kan opstellen.

Tijdens de week gingen de wiskundigen ook op excursie naar Bruil, om de prints in het echt te zien. Buiter: “Dat was niet alleen leuk, maar ik merkte dat ze daarna ook beter begrepen welke vormen er allemaal mogelijk zijn.” De wiskundigen presenteerden hun resultaten na afloop van de week ook nog bij het management van Bruil. Buiter: “Dat was prettig, dan weten zij ook goed waar wij mee bezig zijn geweest.”

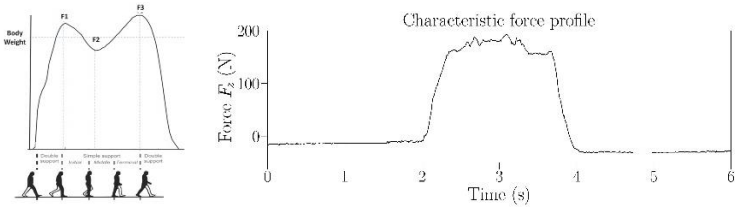
Buiter is ervan overtuigd dat Bruil de uitkomsten gaat gebruiken. “Met de eisenlijst kunnen we meteen aan de slag. De structurele analyse vraagt meer tijd. Er loopt bij ons een onderzoek van civiele techniekstudenten, dat ook die kant opgaat.” Zij is ervan overtuigd dat de stabiliteit van de ontwerpen in de toekomst zeker helemaal doorgerekend zal worden. “Dat is ons inmiddels wel duidelijk. We weten nog niet, of wij die analyses zelf gaan doen, of dat we ze aan een constructeur zullen uitbesteden. Maar deze week heeft ons hoe dan ook meer inzicht gegeven in welke kant we op moeten”, besluit Buiter.

Kalkoenen wegen: gewichtige loopjes

Fokkerijbedrijf Hendrix Genetics vroeg de Studiegroep Wiskunde met de Industrie hoe nauwkeurig je kalkoenen kan wegen met een drukplaat. De wiskundigen persten alles uit de data. "Om de gewenste nauwkeurigheid te halen, moeten de kalkoenen 10.000 keer over de drukplaat lopen."

Het is stoffig en zwaar werk, kalkoenen wegen. De dieren worden één voor één opgetild en gaan dan samen met de weger op de weegschaal. Een kalkoen kan wel 25 kilo zwaar worden. "Dat optillen geeft de kalkoenen stress. Daar komt bij dat we moeite hebben om voldoende mensen te vinden voor dit werk. We zouden dus graag een andere manier van wegen willen", vertelt Bram Visser van het Research & Technology Center van fokkerijbedrijf Hendrix Genetics.
Hendrix Genetics fokt kalkoenen door in elke generatie de beste exemplaren te selecteren en die met elkaar te kruisen. "Informatie over hoe de dieren groeien is essentieel is voor ons", benadrukt Visser. Nu weegt het bedrijf de dieren om de paar maanden. "We zouden graag nog meer zicht willen op hun groei. Liefst zouden we ze dagelijks wegen zonder de dieren te storen."
Hendrix Genetics overweegt om drukplaten in te zetten om de kalkoenen te wegen. "De studiegroep bood ons de kans een eerste haalbaarheidstudie te doen." Hendrix Genetics had voor een onderzoek naar loopbewegingen van kalkoenen de dieren al eens over een drukplaat laten gaan. Bij die test werden twee soorten kalkoenen gebruikt, die ook op de traditionele manier werden gewogen. Het resultaat was een dataset met gegevens van 183 kalkoenen, die de wiskundigen konden gebruiken. Die gegevens bracht Visser mee naar de studiegroep. Hendrix Genetics had zelf nog niet naar de drukplaatmetingen gekeken. De vraag die Visser de groep stelde was de volgende: "Met welke nauwkeurigheid kunnen jullie het gewicht van de dieren bepalen met deze dataset?"

“De vraag was meteen helder, en iedereen had er wel ideeën hoe we dit aan konden pakken”, vertelt Jos Hageman, universitair docent bij Biometris in Wageningen. Hij is een van de wiskundigen die aan de vraag van Hendrix Genetics werkten. Hageman koos voor de groep van Hendrix Genetics omdat de vraag statistisch georiënteerd was, waar zijn expertise ligt.
De drukplaat heeft vier sensoren, die allemaal een waarde geven voor de krachten op de plaat. Gecombineerd levert dat een curve op voor de neerwaartse kracht op de plaat, F_z, en de kracht in de twee horizontale richtingen, F_x en F_y. De eerste stap van de wiskundigen was het opschonen van de data, eerst maar eens gewoon op het oog. “Sommige metingen waren niet op het goede moment gedaan, die begonnen pas als de kalkoen al op de plaat stond. Ook hadden we grafieken die zo afweken dat we ze niet konden gebruiken. Wat er dan gebeurd was, weet Hageman ook niet precies, maar duidelijk was wel dat de kalkoen niet netjes rechtdoor had gelopen. De groep keurde 18 metingen af, en hield er 165 over.



Bij het lopen over een drukplaat ontstaat een typische tweebultige drukcurve. Rechts: Voorbeeld van een meting.

De typische drukcurve van de neerwaartse kracht ziet eruit als een bult met twee pieken en een deuk in het midden. “Linkerpoot, rechterpoot”, doet Hageman het kalkoenenloopje met zijn handen voor. Het eerste idee om het gewicht te bepalen was eenvoudig: de wiskundigen namen de maximumwaarde uit de curve. Hageman: “Rechttoe, rechtaan. Later zou blijken dat die waarde ook inderdaad de belangrijkste voorspeller was van het gewicht.” Maar echt goed waren de resultaten niet, de

nauwkeurigheid was maar matig. Daarom werd ook gekeken naar het oppervlak onder de curve, dat correleert ook met het gewicht. De resultaten waren een klein beetje beter dan de maximumwaarde, maar het leverde niet zoveel op als gehoopt, vertelt Hageman. “Op dit punt hadden we wel in de gaten dat de data waarschijnlijk niet goed genoeg waren om het gewicht met grote nauwkeurigheid te bepalen. Maar we waren wel van plan er alles uit te persen.”

Dus ging de groep het, in Hagemans woorden, “gewoon allemaal doen”. Plan van aanpak: machine learning. De metingen van de sensoren werden samen in een model gestopt. Daarin gingen ook het gewicht van de kalkoenen, en de informatie over het soort kalkoen. De metingen waren namelijk van twee soorten kalkoenen, waarbij de ene soort duidelijk zwaarder was dan de andere. “Het idee is dat al die metingen iets met het gewicht te maken hebben”, legt Hageman uit, “Je weet alleen niet precies hoe de correlatie is. Dat bepaalt het model zelf.” De groep gebruikte meerdere methoden, maar de resultaten waren niet erg goed. Uit de modellen bleek dat de factor die het gewicht het best voorspelde, het type kalkoen was. Die informatie voorspelt nog beter dan de meetwaarden van de drukplaat. “Weet je wat het is”, zegt Hageman, “als de resultaten van de simpele tools al geen goede resultaten geven, dan los je dat uiteindelijk ook niet op met verfijndere methoden. Dan zijn je data gewoon onvoldoende.”

Uiteindelijk behaalde het beste model van de groep een gewicht met een nauwkeurigheid van één kilo, waar Hendrix Genetics op 50 gram had gehoopt. Zou het helpen om iedere kalkoen meer dan eens over de drukplaat te laten lopen? “O ja”, antwoordt Hageman. “Dat helpt. Maar om met dit model, en deze metingen de gewenste nauwkeurigheid van 50 gram te halen, zou je de kalkoen meer dan 10.000 keer over de plaat moeten laten lopen.”

Al liet de nauwkeurigheid dus duidelijk te wensen over, ontevreden waren de wiskunden niet. De wiskunde deed zijn werk, en zou met betere data ook beter presteren. “De data waar nu mee is gewerkt, waren bijvangst in een groter experiment”, benadrukt Hageman. Als Hendrix Genetics echt met drukplaten

wil gaan wegen, dan konden de wiskundigen zeker verbeteringen verzinnen in de testopzet. Meerdere drukplaten achter elkaar, de kalkoenen meermaals laten lopen, wandjes aan de zijkanten zodat de kalkoenen netter rechtdoor lopen, filmpjes erbij om de beweging beter te kunnen interpreteren: de mogelijkheden zijn legio. “Hoe reproduceerbaar de drukplaat zelf is, dat zou ik ook nog willen weten”, benadrukt Hageman. Hij durft nu niet te zeggen, of met alle verbeteringen erbij de 50 gram nauwkeurigheid wel binnen bereik ligt. “De kalkoen stil laten staan op de plaat, dat zou echt het beste zijn. Als je daar wat op verzint, ben je er”, lacht hij.
Visser van Hendrix Genetics is ook te spreken over de uitkomsten. “We hebben goed advies gekregen.” De uitkomsten moet je bekijken in het licht van een verkennend onderzoek, zegt Visser. “De data kwamen van een proef waarin nog niets is geoptimaliseerd. Als ik de uitkomsten zo zie, kan je met wat verbeteringen en herhaalde metingen toe naar een nauwkeurigheid van 200 gram. Als we de kalkoenen geregeld zouden kunnen meten, kunnen we dan toch groeicurves plotten met een behoorlijke nauwkeurigheid. We weten nu ook hoe we een gewicht uit de metingen kunnen bepalen.”
Hendrix Genetics zou graag een opstelling willen waarbij de dieren regelmatig over de drukplaat lopen, zonder dat ze het door hebben. Visser: “We willen het liefst gewoon in de stal meten. Bijvoorbeeld met een drukplaat in de vloer, op weg naar het voer.” De weegschaal zou de kalkoenen dan kunnen herkennen met behulp van een chip. Visser vertelt dat Hendrix Genetics dit idee verder onderzoekt. “De resultaten van de week kunnen we daar goed bij gebruiken.”

Reistijden op een chip

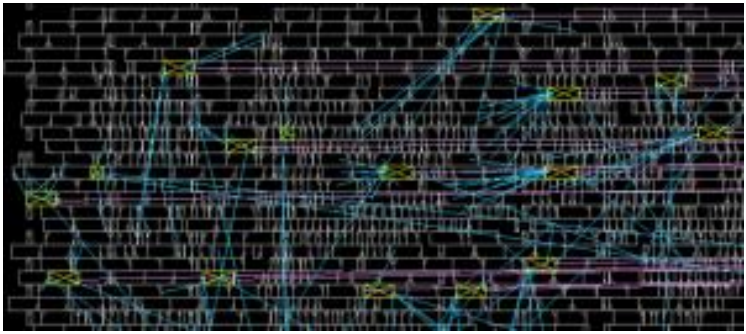
Een chip is een wirwar van miljoenen componenten en de bijbehorende verbindingen. Hoe lang doet een signaal er over om in die wirwar van het ene naar het andere station te reizen? Het bedrijf Synopsys, dat chips ontwerpt, vroeg de wiskundigen van de Studiegroep hulp bij het schatten van die tijd.

Chips hebben een beat, ze voeren hun berekening uit in rondes. De tijd loopt, en na één kloktijd - één beat - moeten alle componenten op de chip klaar zijn met hun taak voor die ronde. De output van de ene ronde is weer input voor de volgende ronde. Het is essentieel dat alle componenten de beat bijhouden, anders loopt de boel in de soep. Daarom is het bij het ontwerpen van de chip zo belangrijk om in te kunnen schatten, hoe lang een signaal onderweg is van A naar B, en hoeveel tijd er op punt B nodig is om het signaal te verwerken.

Op één chip zitten miljoenen componenten. Die op handige, logische manier op de chip plaatsen is geen sinecure. De verbindingen mogen elkaar niet raken en de verbindingen moeten zo kort mogelijk zijn om de reistijd van het signaal te minimaliseren. “In het ontwerpen van een chip kijken we altijd eerst naar de kritische verbindingen. Die moeten snel en dus zo kort mogelijk zijn. Minder belangrijke verbindingen mogen wel een omweg maken. Het voelt alsof je tien keer het hele wegennetwerk van Europa aan moet leggen, terwijl je ook nog moet bepalen waar de steden liggen”, vertelt R&D-directeur Ed Huijbregts van Synopsys in zijn kantoor op de High Tech Campus in Eindhoven.

De vraag die Huijbregts en zijn collega’s de wiskundigen stelden, was om een slimme manier te verzinnen om de *delayfunctie* af te schatten: de reistijd van een signaal tussen de componenten. Zelf gebruikt Synopsys daarvoor een heel simpel algoritme, enkel gebaseerd op de afstand: hoe groter de onderlinge afstand, hoe langer de reistijd. “Dat is een eerste benadering, maar we verwachten winst door meer variabelen mee te nemen”, aldus Huijbregts. Eis aan de wiskundigen was daarbij wél om het

allemaal simpel te houden. De delayfunctie word namelijk extreem vaak gebruikt tijdens het ontwerpproces van een chip. Bij het ontwerpen van een chip gebeurt dit miljarden keren: rekentijd is dus cruciaal.



Een chip met in kleur de verbindingen tussen de componenten. Beeld: Synopsys.

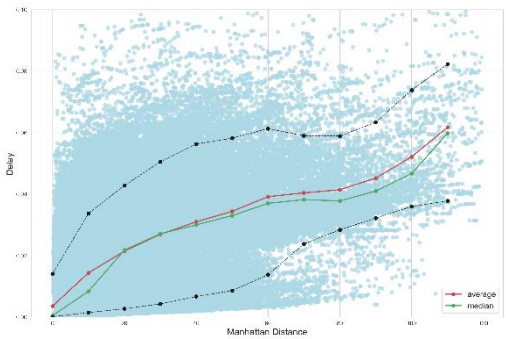
Als uitgangspunt kregen de wiskundigen data van twee heel verschillende soorten chips. “We hebben de wiskundigen behalve de positie van de componenten bewust maar een paar andere variabelen meegegeven, om te voorkomen dat ze met té complexe voorstellen zouden komen”, vertelt Huijbregts achteraf. “We hebben liever een snel, simpel model, waarvan je bovendien goed snapt hoe het werkt, dan een complex model dat meer rekentijd kost.”

De wiskundigen kregen de volgende informatie over de chips: een lijst met componenten, het type component, de positie van de component, de verwerkingstijd voor in- en uitgaande signalen en de zogeheten *slack* – een maat die aangeeft in hoeverre de gewenste snelheid voor een verbinding wordt gehaald. De vraag was een verbeterde delayfunctie te ontwikkelen met deze informatie als input.

“We begonnen met het opsplitsen van de data voor verschillende soorten componenten”, vertelt deelnemer Harshit Bansal. Het type component bleek echter geen goede voorspeller te zijn voor de delayfunctie. Wat wél van invloed bleek, was of een

component een zogeheten *sink* of *isink* was. Een isink is een component waar het signaal wordt omgedraaid – er wordt dan van een 0 een 1 gemaakt, of andersom. Isinks leveren een grotere vertraging op dan sinks - componenten die het signaal niet inverteren. De wiskundigen raden Synopsys daarom aan om het onderscheid tussen sinks en iskinks mee te nemen bij het afschatten van de delayfunctie.
Vervolgens keken de wiskundigen naar het aantal verbindingen tussen de componenten. Een component kan verbonden zijn met één of meer volgende componenten. De meeste componenten hebben een paar verbindingen, maar sommigen hebben er honderden. Bansal: "Wij wilden weten of de reistijd van het signaal afhankelijk is van het aantal verbindingen." Dat bleek inderdaad zo te zijn. De wiskundigen adviseren dan ook om ook deze factor mee te nemen in de delayfunctie.
De wiskundigen verdeelden nu hun datasets in 14 klasses, waarbij gesorteerd werd naar sinks en isinks en naar het aantal verbindingen. Voor ieder van de klasses bepaalden de wiskundigen met lineaire regressie een voorspellende delayfunctie. De delaytijd per klasse werd uitgedrukt als functie van de afstand tussen de componenten. Tot vreugde van de groep gaf deze methode een verbetering ten opzichte van de methode van Synopsys. Bansal: "Een week is kort. We hebben laten zien dat je met deze methode een betere uitkomst krijgt, maar we hebben nog niet geoptimaliseerd. Sommige klasses hadden wat weinig data. Ook zou het kunnen zijn dat je de klasses beter anders kan indelen, maar die optimalisatieslag laten we over aan Synopsys. Het ging nu om de methode."
De groep adviseert Synopsys ook om eens goed te kijken naar drukke plekken op de chip. "Je hebt in het midden van een chips knooppunten, centra waar allerlei belangrijke componenten en verbindingen dicht op elkaar zitten. De delaytijden zijn daar soms opvallend hoog, ondanks de korte afstand tussen de componenten", vertelt Bansal. Door deze a-typische verbindingen als een aparte klasse te beschouwen, is de delayfunctie mogelijk

nog duidelijk te verbeteren. “Wij hebben daar niet verder naar gekeken, door tijdgebrek. Maar daar verwacht ik zeker winst.”
De wiskundigen vonden ook tijd om te kijken naar de verschillen tussen de datasets. Waar in dataset 1 een mooie trend te zien was tussen de lengte van een verbinding en zijn delaytijd, vertoonde dataset 2 veel meer ruis. De wiskundigen deelden dataset 2 daarom op in kleine subsets voor een statistische analyse. De data van de subsets werden uitgezet in histogrammen, die de vorm van een bètaverdeling bleken te hebben. Bansal: “Er was te weinig tijd voor de volgende stap – per subset een lineaire benadering te maken voor de delaytijd, maar deze aanpak lijkt ons wel een goed idee.”
Een andere, simpelere methode werkte ook behoorlijk. De wiskundigen gebruikten nu ook enkel de reisafstand als maat, net als Synopsys doet. Maar in plaats van de hele dataset als één geheel te benaderen met een delayfunctie, hakten de wiskundigen de data op in subsets. De subsets waren gebaseerd op de lengte van de verbindingen. Per subset bepaalden zij een delayfunctie, waardoor de delayfunctie wat beter op maat was.



De delayfunctie is nu beter op maat dankzij het onderverdelen van de data in subsets.

Op donderdag besloten de wiskundigen op de valreep nog met machine learning aan de slag te gaan. Als belangrijkste input

kozen zij de factoren, waar ze eerder in de week succes mee boekten: de afstand tussen de driver en de sink, en het aantal verbindingen dat de driver heeft. Deze aanpak leverde duidelijk de beste resultaten, maar tegen een prijs. “Deze methode is traag, 70 keer langzamer dan de aanpak met lineaire regressie”, zo vertelt Bansal. Voor de daagse optimalisatieslagen in chipdesign is dat te langzaam, beaamt ook Huijbregts. Toch kan de aanpak interessant zijn. “Misschien is het mogelijk uitkomsten in vergelijkbare situaties te hergebruiken.” Huijbregts benadrukt dat machine learning goed werkt als je veel data hebt om op te trainen, en dat veel data nou precies is wat Synopsys in huis heeft. “Dit is zeker de toekomst.” Nu al wordt machine learning gebruikt in chip design, bijvoorbeeld voor het herkennen van fouten in een ontwerp.

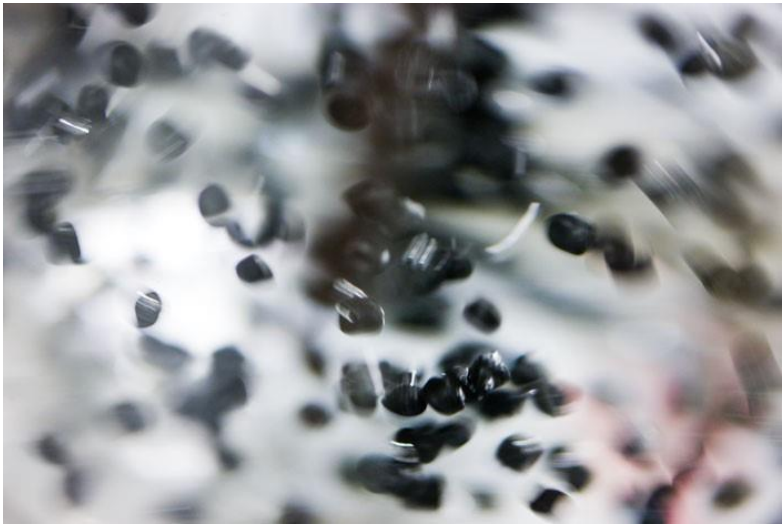
Een pad dat de groep in de week ook kort bewandelde was die van de fysica van de chip. De delaytijd is immers ook te berekenen aan de hand van de weerstand en de capaciteit van de draad en de component. Het ligt voor de hand om de delaytijd dan ook op die manier te bepalen. Uitgeschreven dook er echter een kwadratische term op in de delayfunctie. Deze aanpak viel daarom voor nu af; Synopsys houdt het graag bij een lineaire benadering. Bovendien leert de ervaring dat al die mooie fysische vergelijkingen het goed doen op papier, maar in de praktijk tegenvallen. Huijbregts: “Je kan wel netjes een formule opschrijven voor de capaciteit van een draad, maar we weten dat het in praktijk zo niet werkt. De capaciteit van een verbinding verandert bijvoorbeeld beduidend wanneer een naburige draad niet parallel ligt, maar er haaks opstaat. Daar houden die formules geen rekening mee.” “Ook al hebben we deze weg niet gekozen, de fysica is echt niet helemaal verdwenen”, relativeert Bansal. “Die zit namelijk wel ingebakken in de dataset die we gebruikten.” Huijbregts vindt dat de frisse blik van de wiskundigen de week zeer de moeite waard heeft gemaakt: “Ik vond het inspirerend. We zijn nu bezig met het testen van de resultaten.” Ook Bansal blikt tevreden terug: “Leerzaam, en fijn om een bedrijf te kunnen helpen met je wiskunde.”

Dichtslibbende filters en vastlopende computers

Drinkwaterbedrijven halen medicijnresten en andere verontreinigingen uit de bronnen voor ons drinkwater. De filters hiervoor verzadigen na verloop van tijd, maar na hoeveel tijd precies? Dat wil wateronderzoeksinstituut KWR Water graag modelleren. KWR kwam naar de Studiegroep Wiskunde met de Industrie voor hulp bij een vastlopende berekening.

Ongeveer een derde van het Nederlandse drinkwater wordt bereid uit oppervlaktewater. Drinkwaterbedrijven gebruiken actievekoolfilters om water te zuiveren van pesticiden, medicijnresten en andere soorten microvervuiling. “We willen graag weten wanneer die filters vol zijn”, vertelt Dirk Vries. Hij is onderzoeker bij het team Drinkwater van KWR, het kennis- en onderzoeksinstituut voor de watersector. De organisatie ontwikkelt momenteel een model dat voorspelt hoe vol een filter is.
“Het onderwerp is actueel, in het nieuws zag ik laatst weer een bericht over het belang van het zuiveren van medicijnresten uit water. Het is leuk om in zo’n week te werken aan iets wat maatschappelijk zó relevant is”, aldus Karel Keesman, hoogleraar aan de WUR. Hij werkte tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie aan de vraag van KWR.
Een drinkwaterbedrijf produceert veel water, dus de actievekoolfilters die het gebruikt zijn ook groot. “Actieve kool zit in metersgrote bakken of in drukketels. Een ketel is dan snel vier meter hoog en anderhalf in doorsnee”, vertelt Vries om gevoel te geven voor de omvang. Actieve kool is een opgeschoonde vorm van koolstof met een fijne structuur, en daardoor een groot oppervlak. De vervuiling blijft in de poriën van de koolstofkorrels in het filter steken. Daarnaast plakt de vervuiling aan de koolstofatomen – vandaar de naam *actieve* kool. De filters raken uiteindelijk verzadigd: de drinkwaterbedrijven vervangen een deel van de actieve kool om de twee tot drie jaar. Het dichtslibben

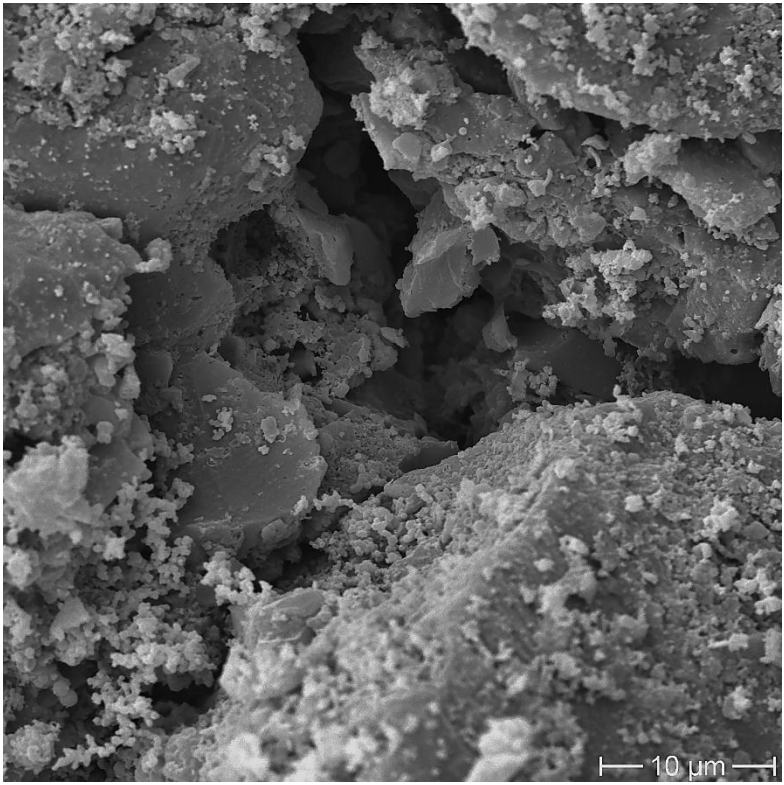
gebeurt met name door restjes organisch materiaal in het water, de concentraties van de andere stoffen zijn beduidend lager.



Korrels actieve kool.

Het model dat KWR ontwikkelt voorspelt hoe goed een actievekoolfilter vervuiling door de tijd heen adsorbeert. Daarmee kan ook worden bepaald wanneer een filter aan vervanging toe is. Bovendien kan bij vervuiling met een specifieke stof worden berekend hoe goed het filter deze stof uit het water haalt. “Dat laatste is belangrijk”, benadrukt Vries. “Soms moet een drinkwaterbedrijf een tijdje dicht wanneer er een stof in het oppervlaktewater belandt, enkel omdat we niet goed weten of de filters deze stof voldoende zuiveren. We hebben namelijk niet van alle soorten vervuiling zogeheten adsorptiekarakteristieken.” Dat is niet gek: er zijn immers honderdduizenden verschillende stoffen die in het oppervlaktewater terecht kunnen komen. “Daar komt bij dat het niet alleen om de stof zelf gaat, maar ook om de interactie met de andere stoffen in het water”, voegt Vries toe. “Soms heeft een combinatie van stoffen namelijk een negatief effect op de binding in het filter. Het omgekeerde komt ook voor:

een stof die zich juist beter aan het filter hecht door de aanwezigheid van organisch materiaal op het filter. Dat maakt het complex. ”



Microscoopopname van actieve kool. Beeld KWR.

KWR verwacht de adsorptie van de filters beter te kunnen voorspellen door gebruik te maken van chemische families, stoffen die op elkaar lijken. “In ons model willen we pakweg 150 stoffen opnemen, die samen representatief zijn voor een veel grotere groep”, legt Vries uit. Bij het ontwikkelen van het model liep KWR echter tegen een rekenkundig probleem aan: de berekeningen liepen vast bij het doorrekenen van meerdere stoffen, of duurden eindeloos. “Hoe kan dat, en hoe lossen we het

op? Dat waren onze vragen aan de wiskundigen van de studiegroep", zegt Vries.
Mia Jukic, promovendus in Leiden, deed mee aan de studiegroep. Zij koos voor de vraag van KWR, omdat die het best aansloot bij de wiskunde die zij in haar daagse leven ook doet. "KWR heeft een groot simulatiepakket, maar in de studieweek hebben we gewerkt met een vereenvoudigd model voor het zuiveren van slechts één stof", vertelt Jukic. "Ons eerste doel was uitzoeken wat er in de berekeningen precies misging."
Het eenvoudige model bestond uit twee partiële differentiaalvergelijkingen, die de toestand van het filter beschrijven. De eerste vergelijking beschrijft de concentratie in het water door de tijd heen. De tweede beschrijft de toestand van de kool zelf, namelijk de afname van het actieve oppervlak. Samen beschrijven die twee vergelijkingen het massatransport door het filter. Zo weet je hoe vol het filter is, waar de verontreiniging blijft steken en hoe lang het nog duurt voordat het filter een zogeheten doorbraak bereikt en er verontreiniging door het filter gaat lekken. Keesman: "Het eerste wat je probeert met zo'n set vergelijkingen is om ze expliciet op te lossen, rechttoe, rechtaan. Dat betekent dat je berekent wat er nú in het filter gebeurt op basis van wat er vlak daarvoor gebeurde." Dat werkte zacht gezegd voor geen meter, de wiskundigen liepen tegen hetzelfde probleem aan als KWR. Keesman: "Het duurde uren om één component door te rekenen." Jukic: "Het ging uiteindelijk mis doordat de oplossing van één van de vergelijkingen door 0 schiet: we kregen dan een negatieve concentratie vervuiling, wat natuurlijk niet kan. Om dat te vermijden koos het model steeds kleinere tijdstapjes, waardoor de berekening trager en trager werd."
Het goede nieuws was dat de oorzaak van het probleem nu bekend was, maar daarmee waren de vergelijkingen nog niet opgelost. Nou zijn wiskundigen niet voor één gat te vangen. Want als van voor naar achter niet wil, dan probeer je een set partiële differentiaalvergelijkingen van achter naar voor op te lossen. Jukic: "Het was een logische stap, tijd voor de impliciete aanpak."

“Dan hangt alles wat er nu gebeurt af van de toekomstige toestand”, legt Keesman uit. Maar ook deze methode liep vast. “Inmiddels waren we twee dagen verder. Mijn verwachting dat we de vergelijkingen wel in een dag zouden kraken, waren dus wat te optimistisch”, geeft Keesman toe. ’s Avonds, tijdens het gezamenlijke Studiegroepdiner, ging het gesprek verder – over wiskunde natuurlijk. “Tihomir Ivanov, een Bulgaarse wiskundige uit onze groep, stelde voor om het dan eens semi-impliciet te proberen”, aldus Keesman. Jukic: “Wanneer impliciet niet werkt, en expliciet ook niet, dan kan een combinatie van beide de oplossing zijn.”

“In de vergelijking met de concentratie in het water zat één niet-lineaire term, die voor het gedoe zorgde”, legt Jukic uit. “Die term losten we expliciet op, de rest impliciet.” Deze aanpak werkte, de berekeningen liepen nu soepeler. “Best blij”, antwoordt Jukic met een glimlach op de vraag hoe dat voelde. De groep visualiseerde de resultaten door grafiekjes te plotten van de vervuiling in het filter. Jukic: “KWR zal moeten kijken of de parameters allemaal kloppen, maar het verloop van de grafieken ziet er goed uit. Je ziet het filter vollopen en verzadigen.”

De resultaten van de groep gingen over het filteren van één stof uit het water. Tijd om het model uit te breiden naar meerdere stoffen was er niet. “Daar zal KWR zelf mee aan de slag moeten, maar ik zie geen reden om te denken dat deze oplossing voor meerdere componenten níet zou werken”, zegt Jukic. Ook Keesman verwacht dat de methode uit te breiden is naar meer stoffen.

Vries van KWR is tevreden met de uitkomst van de week. “Goed dat we hebben meegedaan. De wiskundigen waren zeer gemotiveerd, het was hartstikke leuk om met ze naar de wiskunde te kijken. En mooier nog, het is nu duidelijk waar het probleem zit en hoe we dat op kunnen lossen.” Vries kijkt er naar uit de oplossing te implementeren: “Ik heb er een goed gevoel bij. ” De berekening is ook snel, en dat is belangrijk: “Uiteindelijk willen we toe naar een webapplicatie. Dan moet het model wel snel zijn, mensen willen niet lang hoeven wachten op de uitkomsten.” De

uitkomsten van de wiskundigen zijn mogelijk ook nog breder toepasbaar, voegt Vries nog toe, bijvoorbeeld voor het modelleren van filtering bij riool- of afvalwaterzuiveringen.
“Volgend jaar doe ik weer mee”, zegt Jukic, die voor het eerst meedeed aan de studieweek. “De sfeer is leuk, je ontmoet andere wiskundigen, en ik heb een inkijkje gekregen in wat bedrijven precies met wiskunde doen.” Keesman: “Het is fijn om in een week echt tot een oplossing te komen. Dat vind ik ook het goede aan de studieweek, dat je met wiskunde echt bij kan dragen. De wiskunde die we hebben gebruikt is niet superingewikkeld, maar je hebt wel wiskundigen nodig om tot een goede analyse te komen.”

Nog even wachten voor meer rust

De stad toegankelijk houden is een uitdaging. Adviesbureau Sweco ontwikkelt software voor verkeerslichten. "We willen graag dat verkeerslichten nog meer gebruik gaan maken van informatie uit de omgeving", aldus Sandra Kamphuis van adviesbureau Sweco.

Verkeerslichten zijn steeds intelligenter geworden. Waar ze in het verleden volgens een vast patroon schakelden, passen ze tegenwoordig hun gedrag aan het verkeer aan. Staat er niemand op de lus, dan slaat het verkeerslicht die baan over. Komt er nog een auto aangereden, dan mag die nog aansluiten in het treintje dat net door groen gaat.
Bovendien werken steden met scenario's voor hun verkeerslichten. De instelling van de verkeerslichten verandert als het bezoekuur is bij het naastgelegen ziekenhuis, tijdens de ochtendspits of wanneer er een voetbalwedstrijd in de stad is. "In het oosten van het land hebben de verkeerslichten zelfs een scenario voor Duitse feestdagen, dan komen er veel Duitsers winkelen. Het verkeer komt dan echt uit een andere hoek dan normaal. Veel van die scenario's kan je inprogrammeren, die gaan dan automatisch lopen. Andere scenario's activeer je wanneer het nodig is, bijvoorbeeld wanneer er een groot evenement in de stad is", vertelt Sandra Kamphuis. Zij werkt als productmanager aan Smart Traffic. Sweco is een adviesbureau dat werkt aan de stad van de toekomst, en onder meer software maakt voor de bediening van verkeerslichten.
Sweco's sturingssoftware voor verkeerslichten bepaalt nu per kruispunt de beste oplossing. "De verkeerslichten weten wel van naastliggende kruisingen hoeveel verkeer eraan komt, maar bepalen lokaal de beste oplossing. Ze houden daarbij geen rekening met wat de buren doen met het verkeer dat hun kant op komt", vertelt Kamphuis. "Terwijl dat wel verstandig kan zijn. Bij grote drukte kan je het verkeer dan beter over de kruispunten doseren, waardoor ze niet overvol raken." Zij vroeg de wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie mee

te denken over hoe je dit zou kunnen veranderen. In de toekomst wil Sweco toe naar verkeerslichten die bijvoorbeeld ook inspelen op files op de omliggende snelwegen, vertelt Kamphuis.
Wiskundige Rogier Brussee deed voor de derde keer mee aan de studiegroep. Hij koos voor Sweco's vraag omdat hij die de meeste uitdagende vond: "Echt een om op te kauwen, hier was niet zo duidelijk hoe je het probleem moest benaderen." Brussee vertelt dat Sweco bij verkeerslichten met een optimalisatiefunctie de wachttijd in het kwadraat van de individuele auto's minimaliseert. Door niet de wachttijd zelf te optimaliseren, maar het kwadraat ervan, worden lange wachttijden van individuele auto's afgestraft – wat goed is omdat niemand graag lang wacht voor een verkeerslicht. "Het zou voor de doorstroming vaak beter zijn als je een paar mensen écht lang laat wachten, maar dan worden mensen boos en gaan ze gekke dingen doen."

Wat goed is voor de wachttijd bij één verkeerslicht, is niet per definitie goed voor de doorstroming van de hele stad. Brussee vertelt dat de wiskundigen bij het benaderen van het probleem de volgende gedachte als basis namen: als mensen lang moeten wachten bij een overvol kruispunt, dan hoef je ze bij het kruispunt ervoor niet supersnel door te laten – dan kunnen ze net zo goed daar nog even wachten. "Zo kan je de druk van het kruispunt verspreiden over de omliggende kruispunten. Als je dat overal

doet, verbetert hopelijk de algehele doorstroming in de stad." Wat je vooral wilt voorkomen, benadrukt Brussee, is een zogeheten *gridlock;* in het Nederlands een verkeersinfarct. "De auto's staan dan op het kruispunt stil, omdat de afvoerwegen vanaf het kruispunt al helemaal vol zitten. Die gestrande auto's verstoppen dan je kruispunt, waardoor ook het verkeer in andere richtingen ook niet verder kan. Als dat gebeurt ben je de sjaak. Je wilt bij grote drukte graag dat de omliggende verkeerslichten het verkeer weghouden van het dichtslibbende kruispunt." Een systeem dat elk kruispunt afzonderlijk optimaliseert, kan zo'n verkeersinfarct in de hand werken: het probeert immers alleen het eigen kruispunt zo snel mogelijk leeg te krijgen, zonder dat het weet heeft van de consequenties elders.
Sweco stelde wel als strenge eis dat de verkeerslichten als losstaande eenheden blijven werken. Het is niet de bedoeling dat er software komt voor het hele netwerk: ieder verkeerlicht blijft zijn eigen beslissingen nemen. Wat wel mag, is informatie van het ene verkeerslicht aan het andere voeren. Brussee vertelt dat die eis stiekem wel prettig was. "Een kruising heeft al snel 12 verkeerslichten. Die kan je in theorie op 2^{12} manieren instellen, al zijn er regels die niet alle combinaties toestaan. Wanneer je meerdere kruisingen gaat verbinden, loopt het aantal mogelijkheden gigantisch uit de klauw."

Een gridlock, of verkeersinfarct, ontstaat wanneer auto's de kruising oprijden maar er niet meer af kunnen.

Ieder verkeerslicht wordt bediend met behulp van een optimalisatiefunctie, die op basis van het aankomend verkeer bepaalt hoe de lichten schakelen. “Wat ons al snel duidelijk werd, is dat je zelden exact weet hoeveel auto’s er van het ene verkeerslicht naar het volgende komen”, legt Brussee uit. “Auto’s rijden niet allemaal even hard, ze kunnen onderweg stoppen of afslaan.” Wat wel kan, is meer algemene informatie verstrekken. Een verkeerslicht kan bijvoorbeeld wel doorgeven aan een naburige kruising dat het druk is en dat er gemiddeld zoveel auto’s per minuut haar kant opkomen. Met die informatie gingen de wiskundigen aan de slag. “We hebben aangenomen dat elk kruispunt een verwachting voor de wachttijd voor de komende tien minuten kan geven aan zijn directe buren. Dat is goed te doen: in het simpelste geval houd je elke minuut voor elk kruispunt de gemiddelde wachttijd over de laatste tien minuten bij en extrapoleer je dat. Die informatie gebruiken we voor de optimalisatie van de lichten op de kruispunten er omheen.” Het algoritme doet dan minder zijn best om de wachttijd te verkorten voor auto’s die doorstromen richting een druk kruispunt. Zo verlicht het algoritme de druk op kruispunten met een lange verwachte wachttijd.
Voordeel van de methode is dat ze eenvoudig te implementeren is. “Iedere kruising heeft immers al een optimalisatiefunctie, waarop de beslissingen voor de verkeerslichten zijn gebaseerd. Dit is slechts een extra term in die functie. De rest van de software hoeft er geen weet van te hebben. Je moet er wat standaardberichten voor uitwisselen tussen de systemen”, vertelt Brussee. Hij benadrukt dat dit ook is wat de Studiegroep Wiskunde met de Industrie zo leerzaam maakt voor academisch wiskundigen: “Je kan wel superintelligente oplossingen verzinnen, maar uiteindelijk moet een bedrijf er wel mee uit de voeten kunnen.” Het is dus beter iets te verzinnen wat redelijk werkt en goed te implementeren is, dan iets wat theoretisch optimaal maar in de praktijk te moeilijk. Kamphuis beaamt dat het een grote plus is dat deze methode eenvoudig in te voeren is.

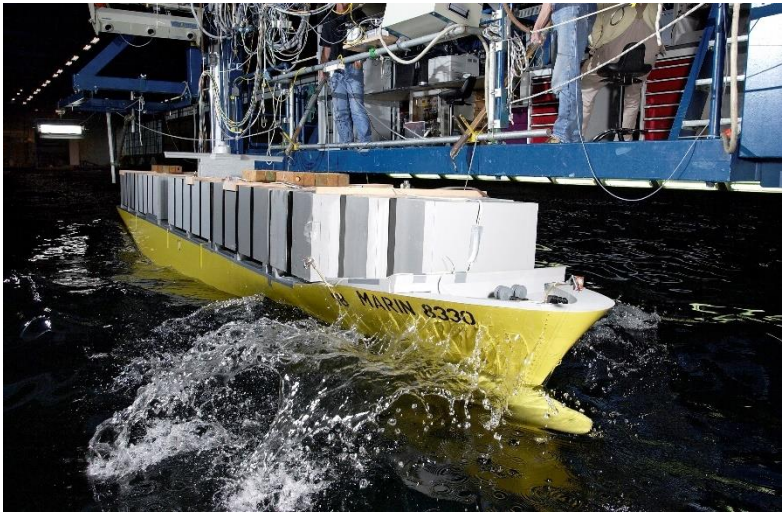
Brussee: “Wat we hopen, is dat die extra term in de optimalisatiefunctie van de verkeerslichten een soort emergent gedrag in het netwerk veroorzaakt. We hopen dat het de drukte zich verspreidt naar de randen van de stad.” Automobilisten moeten daar dan wel wat langer wachten, maar het systeem voorkomt zo hopelijk wel verkeersinfarcten op de beruchte kruisingen in de binnenstad.

Veel tijd om te testen was er niet. Sweco kon de wiskundigen geen toegang geven tot de software van het bedrijf, dus had wiskundige Rémi de Joannis de Verclos in allerijl zelf simulatiesoftware geschreven. Brussee: “We konden daarmee uitproberen wat er gebeurde met een netwerk van drie kruispunten. Daarin leek alles netjes te werken, maar tijd voor meer uitgebreide tests was er niet. De studiegroep heeft een keiharde deadline, op donderdagavond is het klaar. Sweco zal zelf het nu zelf moeten testen binnen de eigen software, en moeten kijken of de gehoopte verbetering inderdaad optreedt.”
Kamphuis geeft aan dat Sweco het idee wil uitwerken in een afstudeerproject. Ze is blij met de uitkomsten van de week. Over de wiskundigen zegt ze: “Je zag het borrelen. Iedereen had zijn eigen ideeën, maar die gedachten kwamen ook weer goed bij elkaar. Als ze gaan, dan gaan ze hard.”

De snelle schroef en het trage schip

Soms kauwt de supercomputer van maritiem onderzoeksinstituut MARIN wel drie dagen op een simulatie van de stromingen rond een schip. Kan dat niet sneller, was de vraag aan de wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie.

“Zeg geen ‘boot’”, zegt wiskundige David Kok met klem. “Dat heb ik in deze week in ieder geval geleerd. Je moet ‘schip’ zeggen.” Kok promoveert in Leiden. Hij was een van de wiskundigen die zijn tanden zette in een vraag van MARIN. Het maritiem kennisinstituut speelde een thuiswedstrijd tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, die dit jaar in Wageningen werd gehouden.

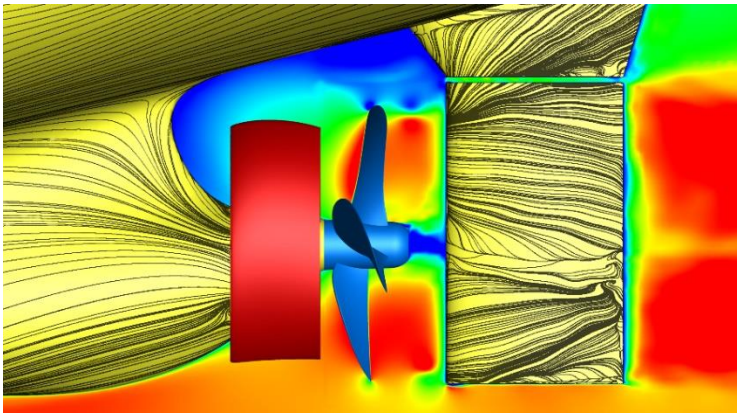


Testen met een schaalmodel in een basin bij MARIN. Beeld: MARIN.

MARIN doet onderzoek naar de optimale vorm van schepen. Het instituut test en optimaliseert voor klanten nieuwe ontwerpen, onder meer om het brandstofverbruik te bepalen. Een deel van de

testen gebeurt traditiegetrouw met schaalmodellen in zogeheten sleeptanks – grote bakken water. “Die schaalmodellen zijn ook geen kleine jongens. Vaak testen we met een modelschaal van rond de 1 op 25. Dan is een schip van 250 meter lang in modelvorm toch nog 10 meter”, vertelt onderzoeker Bart Schuiling van het team Propulsion and Operation Performance. MARIN gebruikt daarnaast veel computermodellen om nieuwe ontwerpen te evalueren en optimaliseren. “Zeker als het om brandstofgebruik gaat. Computersimulaties zijn essentieel om tot een optimale configuratie van schip en schroef te komen”, vertelt Schuiling.

Die computersimulaties kosten zelfs op een supercomputer veel rekentijd. Dat komt vooral door de sterke interactie tussen de sneldraaiende schroef en het schip, waarbij het lang duurt voor de stroming in jargon “helemaal ontwikkeld” is. Soms heeft de supercomputer meerdere dagen nodig voordat het model de stabiele eindtoestand bereikt: het cruisegedrag van het schip, waar het MARIN allemaal om gaat. “Het gaat ons om de uitkomsten op het eind. De vraag aan de wiskundigen was dan ook, of zij methoden konden verzinnen om sneller tot die eindtoestand te komen”, vertelt Schuiling.



Computersimulatie van een schip met schroef. Beeld: MARIN.

De stroming rond een schip wordt gewoonlijk gesimuleerd in een scheepsmodel, dat rekent met tijdstappen van een seconde. De schroef roteert echter met 120 toeren per minuut. Een goede simulatie van de stromingen rond de schroef vereist tijdstappen van milliseconden. Omdat de interactie tussen de stromingen van de schroef en die van het schip groot is, simuleert MARIN het gecombineerde model van schip en schroef nu ook met tijdstappen van milliseconden. Dat maakt de berekeningen zeer rekenintensief. “De vraag van MARIN was of we iets slims konden verzinnen voor dat verschil in tijdschalen”, vertelt Kok. Hij noemt problemen uit de stromingsleer prachtig en verschrikkelijk tegelijk: “Het blijkt altijd lastiger dan je zou willen. Het goede van zo’n schip is wel, dat je weet dat er een stabiele eindtoestand is. Het schip vaart immers gewoon en gaat niet ineens hele gekke dingen doen. Daardoor weet je dat het mogelijk is de simulaties te vereenvoudigen, zonder dat je een compleet verkeerde uitkomst krijgt.”

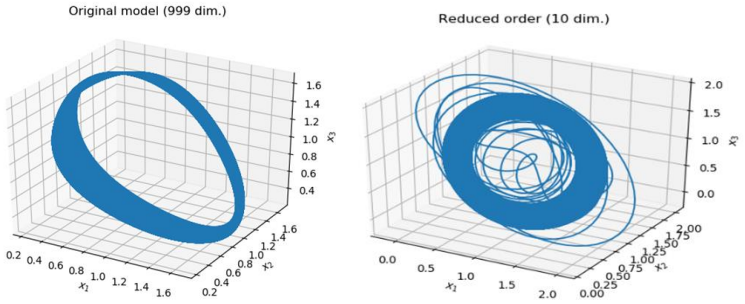
Even waren de wiskundigen bang dat ze weinig toe te voegen hadden: MARIN had zelf ook al met het probleem gestoeid. “'Hebben jullie dit al geprobeerd?', vroegen we MARIN dan. En steeds was het antwoord 'ja'”, vertelt Kok. “Op de eerste dag was dus al duidelijk, dat er met de voor de hand liggende numerieke ingrepen geen winst te halen viel.”

De wiskundigen kwamen uiteindelijk toch met twee methoden om de simulaties sneller te maken, vertelt Kok. “En het mooie is dat je ze zelfs ook allebei kan inzetten. Dat had ik niet verwacht, het resultaat was daardoor beter dan ik had durven hopen.” Ook Schuiling was te spreken over de uitkomsten: “De eerste methode is iets wat we meteen uit kunnen gaan proberen. De tweede is ingewikkelder en meer voor de lange termijn.”

Een eenvoudig computermodel van een scheepje maken om op te oefenen was een van de eerste dingen die de groep deed. “We mochten van MARIN hun modellen gebruiken, maar die zijn wel

heel erg groot. We hadden gedacht dat er ook wel een simpel modelletje zou zijn om ideeën te testen, maar dat was niet zo. Daarom hebben we zelf een zwaar versimpeld model gemaakt", vertelt Kok. Op hun zelfgeschreven model konden de wiskundigen hun ideeën uitproberen, waarna MARIN dan de schone taak wacht om te kijken of al dat moois ook in het grote model werkt.

Het eerste idee van de wiskundigen was het gedeeltelijk loskoppelen van de simulaties van de schroef. De groep wiskundigen maakte gebruik van de wetenschap, dat de waarden voor de stuwkracht van de schroef weliswaar snel variëren, maar wel rond een langzaam veranderend gemiddelde. "Wij berekenden een soort 'gemiddelde schroef' om de stuwkracht van de schroef te simuleren. De waarden van die gemiddelde schroef voer je vervolgens in het scheepsmodel in." Kok legt uit dat je een nieuwe waarde voor de schroef ingeeft, zodra de afwijking van de vorige waarde te groot wordt.



Modelordereductie in Lorenz 96, waarbij het model is teruggebracht van 999 naar 10 dimensies.

Waar de wiskundigen ook mee aan de slag gingen, was een tweede methode om het model lichter te maken: Model Order Reduction, modelordereductie. Een snapshot uit het model van MARIN levert al 8,5 gigabyte aan data op. Zo nauwkeurig hoeft het misschien niet. "Wat je met modelordereductie doet, is uitzoeken welke informatie in je berekeningen essentieel is, en welke je weg

kan laten", legt Kok uit. "Je versimpelt de dynamica van je systeem op zo'n manier, dat de essentie, de dominante stroming, overeind blijft." Ook deze aanpak testten de wiskundigen niet met het grote scheepsmodel van MARIN, maar op een standaardmodel, Lorenz 96. "Als MARIN het scheepsmodel runt, dan levert dat voor iedere stap miljoenen getallen op, waarvan een groot deel constant is. Wat je met deze versimpeling kan doen, is die miljoenen getallen reduceren tot de paar honderd die er echt toe doen. Dat kan een enorme besparing in rekentijd opleveren. Hoeveel precies hangt er vanaf hoeveel je het model kan vereenvoudigen zonder dat het gedrag teveel afwijkt. Dat hangt ook af van de eisen die MARIN aan de nauwkeurigheid stelt."

Kok geeft aan dat de twee ideeën te combineren zijn, het middelen van de schroef en het reduceren van het model. Zowel de schroef- als het scheepsmodel zijn namelijk te reduceren. De resultaten van het gereduceerde schroefmodel kunnen dan worden ingevoerd in het gereduceerde scheepsmodel. Kok gaat er vanuit dat de resultaten ook op het grote model van MARIN toepasbaar zijn. "We hebben nu getest op ons kleine model, maar we hebben er, ondersteunt door de wiskunde, alle vertrouwen in dat het in het grote model ook werkt."

Schuiling kijkt tevreden terug, hij vertelt dat de week hem een aantal dingen heeft opgeleverd. "Misschien wel vooral de erkenning dat dit probleem inderdaad zo eenvoudig niet is. We hadden er zelf al wat mee gestoeid, en kwamen er niet goed uit. Dan is het prettig dat er een slimme groep mensen meedenkt. We weten dat dit probleem nog wel wat inspanning van onze kant vereist." Met de voorgestelde oplossingen kan MARIN goed aan de slag, vertelt Schuiling. "Dat idee van die gemiddelde kracht voor de schroef, daar kunnen we meteen mee uit de voeten. De modelordereductie vraagt meer, maar het is goed te weten dat we die kant op kunnen gaan."

Als bonus gaven de wiskundigen MARIN nog een laatste idee mee om het model lichter te maken, dat in de vliegende vaart van de week niet meer uitgewerkt kon worden. Ze adviseren om in het model onderscheid te maken tussen “snelle” en “langzame cellen”. “De stroming rond de schroef verandert snel, maar wat verderop zijn de veranderingen in de stroming trager”, licht Kok toe. “De simulaties zijn lichter te maken als je die trage plekken minder vaak doorrekent dan de snelle.” Hij verwacht dat een derde van de cellen ‘langzame’ cellen zijn: “Je kunt hier dus zeker winst halen, maar ik verwacht geen grote wonderen. Dat tweederde van de cellen snelle cellen zijn, geeft ook meteen aan waarom het allemaal zo nauw komt: er is een sterke koppeling tussen de stromingen.”