Hoofdstuk 3

De willekeurige discuswerper

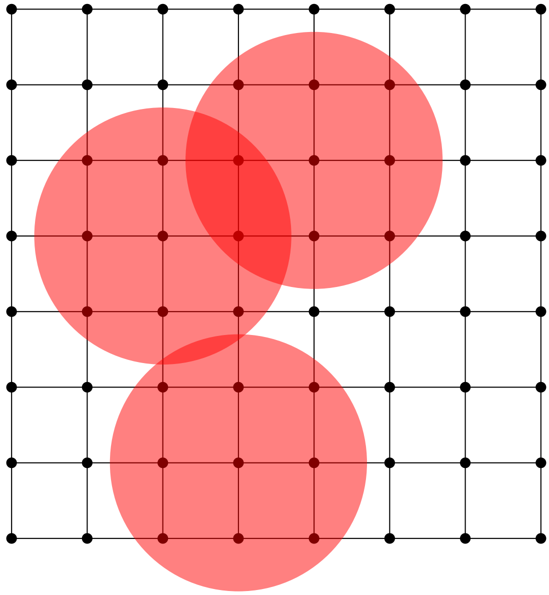
Ionica Smeets

Een discuswerper gooit lukraak schijven op de grond. Hoeveel schijven moet hij gooien voordat de grond helemaal bedekt is? Dit probleem van Philips is misschien wel het meest wiskundige van de studiegroep en tegelijkertijd blijkt het in allerlei vakgebieden op te duiken. Communicatie in netwerken, parkeerproblemen en adsorptie op een oppervlak zijn allemaal varianten van deze discuswerper. Lukt het de wiskundigen om meer inzicht te krijgen in dit beruchte probleem?

Philips Research staat bekend om zijn slimme verlichting. In hun lichtsystemen die zelf beslissen wanneer ze aan-en uitmoeten, zit een netwerk van sensoren. Binnen dat netwerk wordt regelmatig informatie doorgegeven. Een sensor die informatie zendt, doet dat in een cirkel om zich heen. Alle andere sensoren die binnen die cirkel zitten, krijgen de juiste informatie. Het zenden gaat net zo lang door tot het complete netwerk de informatie heeft ontvangen. Hoe lang duurt het voordat dit gelukt is?

Aan het begin van de studiegroep presenteert Philips hun vraag als een discuswerper die schijven in een rooster van punten gooit. Elke schijf landt midden op een nog onbedekt punt, zoals bijvoorbeeld in Figuur 3.1. De discuswerper blijft net zo lang gooien tot alle punten bedekt zijn door een schijf. Hoeveel schijven moet de discuswerper gemiddeld gooien voor hij het hele rooster heeft bedekt?

De punten in het rooster zijn te zien als de sensoren in het lichtsysteem. Een schijf gooien staat voor het verzenden van informatie vanuit het middelpunt. Maar het abstracte probleem van de discuswerper beschrijft ook vraagstukken uit allerlei andere vakgebieden. Scheikundigen zien het als een oppervlak waar willekeurig deeltjes op landen tot het oppervlak verzadigd is en geen nieuwe deeltjes meer opneemt. Wiskundigen kennen het als een abstracte vraag over het stapelen van kubussen in meer dimensies. De eenvoudigste variant hiervan is het *parkeerprobleem van Rényi*: hoeveel auto's passen er achter elkaar in een smalle straat als elke chauffeur zijn auto op een



Figuur 3.1: De discuswerper heeft drie schijven op het rooster gegooid.

willekeurig lege plek neerzet?

Deze problemen hebben met elkaar gemeen dat ze lastig zijn. Dee Denteneer, hoofdonderzoeker bij Philips omschreef het zo tijdens zijn presentatie op maandag: "We gebruiken nu vooral simulaties om dit soort problemen op te lossen. Daaruit krijgen we wel een berg getallen, maar is het erg lastig om te begrijpen wat er precies gebeurt. We hebben fundamentele kennis nodig over deze problemen, we willen het recept kennen. Daarom komen we naar de studiegroep."

Een nieuwe dimensie. Hun vraag spreekt de wiskundigen aan. Guus Regts, promovendus bij het Centrum Wiskunde en Informatica koos zonder twijfelen voor Team Philips: "Dit was het helderste, meest wiskundige probleem." Na een brainstorm op maandagmiddag gaat zijn team in kleine groepen aan de slag met verschillende kleine deelproblemen om daarna weer bij elkaar te komen: "We werkten als één organisme."

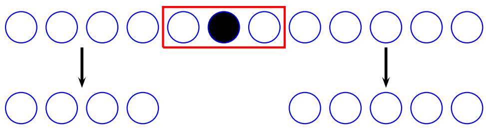
De wiskundigen formuleren het probleem van de discuswerper zo algemeen mogelijk met een meerdimensionaal rooster. Hoeveel (ook al meerdimensionale) schijven moet je naar verwachting gooien om alle punten in dat rooster te bedekken? Of om precies te zijn, wat is de bedekkingsgraad: het aantal gegooide schijven gedeeld door het aantal roosterpunten?

Een variant van dit probleem is de vraag wat er gebeurt als je de schijven op elke plek mag gooien (dus niet per se netjes op een roosterpunt), maar niet toestaat dat schijven elkaar overlappen. Hoeveel procent van de ruimte is dan gemiddeld bezet op het moment dat er geen schijf meer bijpast? De eendimensionale versie hiervan is het *parkeerprobleem van Rényi*, genoemd naar de wiskundige die in 1958 bewees dat in dit geval de dichtheid 0,748 is, iets minder dan vijfenzeventig procent. Dus als je auto's in een smalle straat lukraak neerzet, dan houd je een kwart van de ruimte over.

In twee dimensies is dit probleem om te schrijven naar het probleem van de discuswerper, waarbij de randverschijnselen moeten worden verwaarloosd. Gelukkig zijn die randverschijnselen daar in de praktijk klein genoeg voor. Helaas is het probleem voor twee (en hogere dimensies) nog onopgelost. In 1960 formuleerde wiskundige Palásti het vermoeden dat in dimensie d de dichtheid gelijk is aan $0,748^d$. Maar simulaties laten zien dat dit vermoeden waarschijnlijk onjuist is voor elke dimensie groter dan één. En ruim vijftig jaar later heeft nog niemand een idee wat dan wél de juiste dichtheid is. Pas in 2001 bewees Matthew Penrose dat er in de limiet überhaupt een dichtheid bestaat. Dezelfde Penrose bracht meer eigenschappen van dit soort problemen in kaart, zo bewees hij dat het aantal benodigde schijven ongeveer normaal verdeeld is. Maar veel vragen zijn dus nog onbeantwoord.

Een eendimensionale discuswerper Om meer grip op het probleem te krijgen, besluiten de wiskundigen de eenvoudigste versie te bestuderen: een eendimensionale discuswerper. In dat geval is het rooster een lijn met punten en een schijf is een lijnstuk dat precies drie van die punten bedekt (zijn middelpunt en de twee buurpunten). De bedekkingsgraad zal nu tussen de 33 en 50 procent liggen. In het eerste geval zitten er steeds precies twee lege punten tussen de middelpunten van de schijven, in het laatste geval elke keer precies één. Als de schijven willekeurig gegooid worden, zal de bedekking daar ergens tussenin uit komen.

Het eerste dat opvalt is dat in deze versie het probleem na elke keer gooien splitst in twee kleine problemen.

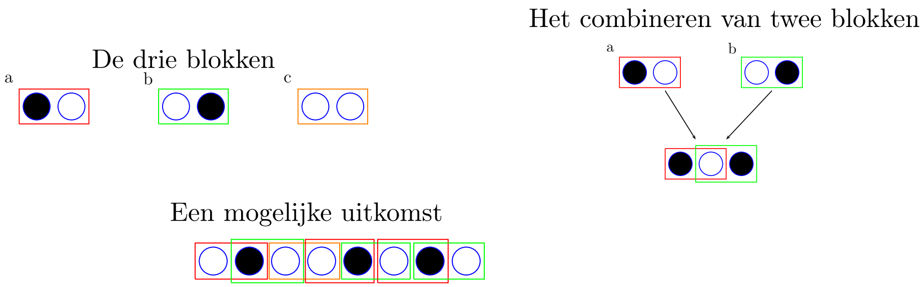


Figuur 3.2: We geven het middelpunt van een schijf aan met een zwart rondje. Zodra er een schijf is gegooid, zijn er drie punten op de lijn bedekt. Links en rechts daarvan blijven er twee kleinere lijnstukken over die los van elkaar geanalyseerd kunnen worden.

Door het splitsen te herhalen is er een elegante formule op te stellen voor de bedekkingsgraad. Met analytische technieken is vervolgens te berekenen dat bij een willekeurige discuswerper de bedekkingsgraad ongeveer 43,2 procent is.

Overgangen. Dat is niet de enige manier om naar het probleem te kijken. Een andere aanpak is om de toegestane eindsituaties te beschrijven. Maak de punten waar het middelpunt van een schijf ligt weer zwart. Dan mogen er aan de ene kant geen twee zwarte punten naast elkaar zijn, want een schijf landt nooit midden op een bedekt punt. Aan de andere kant mogen er geen drie witte punten naast elkaar zijn, want dan is het middelste punt onbedekt.

Toegestane eindsituaties zijn te krijgen door een lijn te maken uit drie soorten blokken die als domino-stenen op elkaar moeten komen. Twee dezelfde zijkanten mogen samen gecombineerd worden tot één vakje.



Met deze blokken is het proces te beschrijven als een Markov-keten. Hierover is veel theorie beschikbaar en de studiegroep besluit aan te nemen dat de entropie in het systeem zo groot mogelijk zal zijn. Dit betekent dat het systeem ongevoelig is voor kleine verstoringen.

Deze aanname leidt tot een schatting voor de bezettingsgraad van 41,1 procent, niet zo ver van de eerder berekende 43,2 procent. Eventueel is deze methode nog aan te scherpen door met grotere bouwblokken te werken.

Tellen maar. De derde en laatste aanpak die de studiegroep probeert voor het ééndimensionale probleem is slim tellen van mogelijkheden. Voor het probleem van de discuswerper bestaat dit tellen uit twee stappen:

1) Bepaal alle mogelijke configuraties die het rooster bedekken

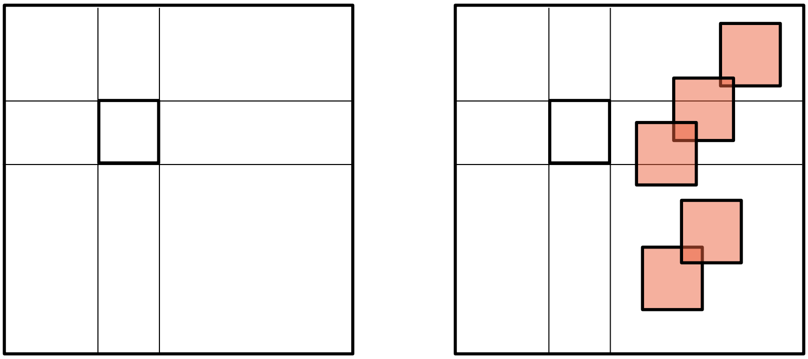
2) Bepaal voor elke configuratie de kans dat je hem bereikt door schijven te gooien

Bij het tellen zijn de configuraties te verdelen in soorten die erg op elkaar lijken. Bij een lijn met éénentwintig punten zijn er bijvoorbeeld elf verschillende soorten met in totaal 379 configuraties.

Omdat het uitrekenen van de kansen net zo lastig is als het probleem in één keer aanpakken, besluit de studiegroep om de kansen grof te schatten. De eerste schijven belanden op een lege lijn en zullen steeds drie punten bedekken. Daarna komen steeds vaker schijven aan één kant naast een andere schijf terecht en bedekken ze nog maar twee nieuwe punten. Tenslotte zullen de laatste schijven landen op losse punten die nog bedekt moeten worden. Deze benadering levert voor het voorbeeld met ééntwintig punten op dat de bedekkingsgraad normaal verdeeld is met een gemiddelde van 9,07 en variantie van 0,24. Simulaties geven voor dit geval als “correcte” antwoord een gemiddelde van 9,38 en een variantie van 0,44.

Het echte probleem. De wiskundigen zijn nu gewapend met drie verschillende methodes om het eendimensionale geval aan te pakken, maar Philips is natuurlijk vooral geïnteresseerd in oplossingen voor het tweedimensionale probleem. Maar het is niet zo makkelijk om de methoden te generaliseren.

Bij het splitsen van het probleem duiken er bijvoorbeeld problemen op bij de afhankelijkheden. Bij elke gelande schijf valt het rooster uit elkaar in een aantal kleinere stukken. Maar anders dan bij het ééndimensionale geval, kunnen schijven uit verschillende gebieden elkaar in de weg liggen. Daardoor zijn de kleinere problemen niet zo makkelijk los van elkaar op te lossen. Wiskundige Guus Regts: “Je hebt te maken met lange-afstands-effecten. Zelfs kleine problemen worden daardoor te groot om met de hand op de lossen.”



Figuur 3.3: Een voorbeeld met vierkante schijven maakt het probleem van de overlap duidelijk.

Ook het tellen van alle configuraties is een stuk ingewikkelder bij het tweedimensionale geval. Als het rooster bijvoorbeeld dertig bij dertig is en schijven steeds vijfentwintig punten tegelijk bedekken, dan zijn er al tien tot de macht vijfennegentig mogelijke configuraties. Dat is royaal meer dan het aantal atomen in het complete heelal.

De hoop voor de tweedimensionale discuswerper lijkt vooral te liggen in de richting van de Markov-ketens. Deze kunnen in meer dimensies worden uitgebreid naar Markov-netwerken. Maar dat is iets voor een vervolgstudie.

Dee Denteneer van Philips is vrijdag tevreden over de resultaten: “We hebben een hoop nieuwe aanknopingspunten. Dat open vermoeden kenden we bijvoorbeeld niet. Voor ons zijn dit soort wiskundige referenties lastig om te vinden, omdat we zo gericht zijn op toepassingen. We gaan hier mee verder, vooral de Markov-optie is erg interessant."

Team Philips: *Ted van der Aalst, Dee Denteneer, Hanna Döring, Manh Hong Duong, Ross J. Kang, Mike Keane, Janne Kool, Ivan Kryven, Thomas Meyfroyt, Tobias Müller, Guus Regts, Jakub Tomczyk*