

## Optieprijsen in een formule

Op de financiële markt worden allerlei soorten opties verhandeld. Banken en andere financiële instellingen willen een redelijke prijs bepalen voor zulke producten. Hoewel de onderliggende wiskunde in theorie bekend is, kost de oplossing veel rekentijd. De wiskundige uitdaging is om de optieprijs snel, maar ook zo realistisch mogelijk te berekenen.

Een optie is een recht om tegen een vooraf bepaalde prijs, en binnen een vooraf afgesproken periode (variërend van maanden tot jaren), een bepaald aandeel op de financiële markt te kopen (call-optie) of te verkopen (put-optie). Voor dit recht betaalt de optiekoper een bedrag aan degene die het recht verleent. Een optie is een afgeleid product (een derivaat) omdat de



Een Amerikaans biljet uit 1916 dat honderd aandelen vertegenwoordigt.

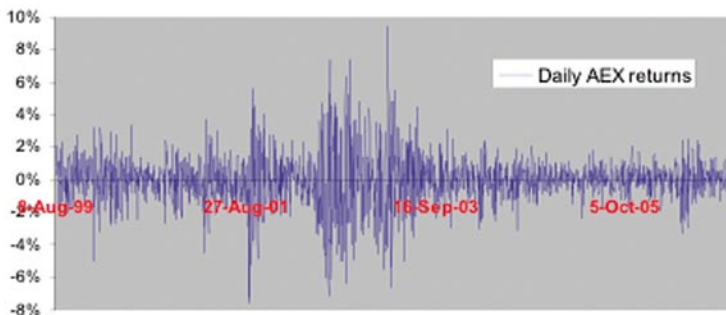
waarde afhangt van de waarde van het onderliggende aandeel, de looptijd, de beweeglijkheid van die waarde en de rente.

Stel dat een bepaald aandeel vandaag 40 euro kost en dat je een call-optie koopt die je het recht geeft om over een jaar hetzelfde aandeel voor 45 euro te kopen. Dan hangt de waarde van de optie af van wat de koers van het aandeel over een jaar is. Stel, dat de koers dan 50 euro is, dan kun je het aandeel zoals afgesproken voor 45 euro kopen. Als je het dan meteen verkoopt, heb je een winst van 5 euro behaald, minus de kosten die je hebt gemaakt voor het kopen van de call-optie.

Naast eenvoudige call- en put-opties bestaan er ook meer exotische opties waarvan de waarde afhangt van een onderliggend aandeel. Financiële experts ontwikkelen voortdurend nieuwe producten om de productkeuze te vergroten. Banken zoals ING verkopen dit soort producten, en willen weten welke prijs ze ervoor kunnen vragen. Die prijs wordt bepaald met een wiskundig model. Omdat de prijs voortdurend kan variëren, wil ING de klant zo snel mogelijk laten weten wat een bepaalde optie kost. Een snelle en toch betrouwbare optieprijsbepaling kan de bank een concurrentievoordeel leveren.

## Rente en beweeglijkheid

De prijs van een optie hangt af van de verwachte ontwikkeling van de aandelenprijs. Die hangt zelf weer op een stochastische wijze af van twee belangrijke parameters: de rente en de volatiliteit, of



*De verandering van de aandelenprijs gedeeld door de aandelenprijs (van de AEX-aandelen) in de periode augustus 1999 tot december 2006. Deze figuur laat duidelijk zien dat de volatiliteit van aandelen niet constant is in de tijd.*

beweeglijkheid van een bepaald aandeel. Hoe meer de waarde van een aandeel in de loop van de tijd schommelt, hoe groter de volatiliteit. En hoe groter de volatiliteit, hoe groter het risico van een investering in dat aandeel. Stabiele beursfondsen zoals Unilever en Shell hebben een vrij lage volatiliteit. Aandelen die vaak en extreem bewegen hebben een hoge volatiliteit. De rente speelt een rol, omdat hoe hoger de rente, hoe aantrekkelijker het is om je geld op een spaarrekening te zetten in plaats van te beleggen in aandelen of opties.

Zowel de ontwikkeling van de rentestand als die van de volatiliteit zijn uiteraard niet van te voren bekend, en moeten dus geschat worden. In het veel toegepaste Black-Scholes model uit 1973, worden zowel de rente als de volatiliteit constant verondersteld. Dat heeft als grote voordeel dat de optieprijs uitgedrukt kan worden in een formule die snel en relatief eenvoudig kan worden opgelost. Het Black-Scholes-model bevat twee termen. De eerste term is deterministisch, en heeft de rente als te schatten constante. De tweede term is stochastisch en heeft de volatiliteit als te schatten constante. De stochastische term is gemodelleerd met een zogeheten Wienerproces, in de natuurkunde ook wel bekend als Brownse beweging.



Het verloop van de rente – hier: de *London Interbank Offered Rate (LIBOR)* – in de periode juli 2000 tot december 2006 laat zien dat ook deze in de tijd varieert.

---

In werkelijkheid is echter noch de rente, noch de volatiliteit constant in de tijd. Dat maakt de deterministische term onzeker, en de stochastische term nog onzekerder. Het realistischere Heston-model uit 1993 gaat daarom een stap verder dan het Black-Scholesmodel door aan te nemen dat de volatiliteit willekeurig in de tijd varieert. De rentestand wordt wel nog steeds constant verondersteld. Het Heston-model blijkt in de praktijk vrij goed te werken op een termijn van jaren, maar niet zo goed voor een termijn van maanden.

### Een realistische prijsformule

Elke bank gebruikt zijn eigen specifieke model, dat weer iets andere aannames doet over de toekomstige rentestand en volatiliteit dan de concurrenten. ING, maar ook andere banken, zoeken naar slimme oplossingsmethoden van een model waarin zowel de volatiliteit als de rentestand stochastisch variëren. De rentestand en de aandelenprijs mogen daarbij aan elkaar gecorreleerd zijn, zoals in werkelijkheid ook het geval is. “Theoretisch weten we goed met dit model te werken”, vertelt Antoine van der Ploeg van ING, “maar het probleem zit in het snel kunnen berekenen van call-optieprijsen in dit model. Veel optieproducten kun je niet met een simpele formule prijsen. Op papier zien de formules er eenvoudig uit, maar voor de oplossing hebben we numerieke technieken nodig die rekenintensief zijn.”

Uit een reeks van waargenomen call-opties op een dag – en dat kunnen er meer dan honderd zijn – probeert ING de parameters in het model te bepalen om de optieprijs van vandaag te berekenen. Dat levert de kalibratie van het model. Modellen worden dus dagelijks gekalibreerd. Van der Ploeg: “Gegeven die geschatte parameters kunnen we andere opties vervolgens daarmee prijsen. Dan staan de numerieke waarden van het model vast. De exotische optieprijsen kunnen we dan via simulatie of andere numerieke technieken bepalen.”

Momenteel wordt het model numeriek opgelost, maar dat kost veel tijd. Zo worden met een Monte-Carlo-methode een heleboel scenario's doorgerekend, en een gemiddelde bepaald van al die scenario's. Die aanpak werkt altijd, maar is duur, omdat er veel scenario's nodig zijn. Van der

---

Ploeg: “De vraag aan de studiegroep was nu of het mogelijk is om een semi-gesloten oplossing voor de prijsformule van een call-optie af te leiden. Als we een formule hebben voor de oplossing dan kunnen we in een fractie van een seconde wel de call-optieprijs berekenen. Dat versnelt het kalibratieproces – en daarmee het prijzen van exotische opties – aanzienlijk.”

### De niche van de rekenkunst

Wat kan een groep van vijftien wiskundigen in een week toevoegen aan de expertise van een grote bank als ING, die zelf econometristen en wiskundigen in dienst heeft? Wiskundige Kees Oosterlee zat in de studiegroep, maar werkt ook in het dagelijkse leven op het terrein van de financiële wiskunde, bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam: “De niche in de financiële wiskunde is om econometristen en wiskundigen ook goed te laten rekenen. Je kunt wel mooie modellen opstellen, maar je moet ze ook oplossen, en dat is meer een ingenieursvaardigheid. Lang niet alle econometristen of wiskundigen zijn daar goed in getraind.”

Tijdens de studieweek splitsten de wiskundigen zich in drie groepen op. Een groep bestudeerde het probleem als een stochastische differentiaalvergelijking, en zocht naar een karakteristieke functie. Een tweede groep hanteerde partiële differentiaalvergelijkingen. De derde en laatste groep koos een tussenliggende aanpak. De laatste twee groepen hebben een eenvoudigere vorm van de afhankelijkheidsstructuur bekeken. De eerste groep, die zocht naar een karakteristieke functie binnen een stochastische aanpak, nam de minste vereenvoudigingen aan. “Het volledige probleem bleek in zijn meest algemene vorm te moeilijk om in een week op te lossen”, aldus Oosterlee. “En”, voegt hij er aan toe, “misschien wel om überhaupt analytisch op te lossen. Maar de drie aanpakken hebben toch interessante inzichten opgeleverd, gebaseerd op iets andere afhankelijkheidsstructuren. We denken dat ING daar toch snellere optieprijsen mee kan bepalen. De karakteristieke functie, die de eerste groep heeft afgeleid, zal denk ik het nuttigste zijn voor ING.”

De karakteristieke functie is weliswaar één functie, maar wel een bijzonder ingewikkelde. Het gaat om een Fourierbenadering van een

---

kansdichtheidsfunctie. “We hebben geprobeerd zoveel mogelijk analytisch te doen,” zegt Oosterlee, “maar het laatste stapje moet je toch numeriek oplossen. Volgens ons moet deze formule tot een snellere numerieke oplossing leiden. Die formule kan ING in principe implementeren in hun eigen software, die geheel gekoppeld is aan internationale bestanden met aandelen- en optieprijsen.”

### Geen gesloten oplossing, toch meer inzicht

“Voor ons was het vooral een verkenning van wat wel en niet mogelijk is”, zegt Antoine van der Ploeg over de verwachtingen vooraf van ING.

“Wie weet zou het wat opleveren als je wiskundigen vanuit verschillende achtergronden naar het probleem laat kijken.”

Wat ING aan de resultaten van de studiegroep heeft, zal in de praktijk nog moeten blijken. Van der Ploeg: “Alle drie de groepen hebben de aanname gemaakt dat het renteproces onafhankelijk verloopt van het aandelenproces. Dat is een sterke aanname, die eigenlijk jammer is, omdat het aandelenproces in de praktijk wel degelijk gerelateerd is aan het renteproces. Het voordeel is echter dat je onder die aanname wel een semi-gesloten oplossing vindt, ook al is die minder realistisch. Het ziet er namelijk naar uit dat er helemaal geen semi-gesloten oplossing bestaat van het complete, meest realistische model, gegeven het rentemodel dat ons voor ogen staat. Dat is geen teleurstellend resultaat, maar eigenlijk een bevestiging van wat we al vermoedden. Het is goed om te zien dat wiskundigen vanuit verschillende achtergronden tot dezelfde conclusie komen.”

Toch gaat ING wel degelijk aan de slag met de gevonden resultaten.

Waar de handelsafdeling van ING snel de prijzen van opties aan klanten moet doorgeven, is de validatieafdeling voortdurend op zoek naar betere modellen en zwakheden in de huidige modellen. “Wij kijken altijd naar meerdere modellen in het systeem, omdat er tot op heden geen consensus bestaat over wat het beste model is. We moeten nog onderzoeken wat de invloed is van die sterke aanname op de uiteindelijke optieprijs. Het kan ook zijn dat het vereenvoudigende effect van de aanname best meevalt.”

---

## Internetinformatie

[www.ing.nl](http://www.ing.nl)

[http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/economics/laureates/1997/press.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/press.html)

Nobelprijs Economie 1997 voor Myron Scholes en Robert Merton voor  
"een nieuwe methode om de waarde van derivaten te bepalen"

(De Black-Scholes-methode).

(Overigens ging het bedrijf van Scholes en Merton, gebaseerd op hun  
Nobelprijswinnende methode, twee jaar na het krijgen van de Nobelprijs  
failliet...)